

# 自发辐射诱导原子质心运动退相干的理论研究<sup>\*</sup>

姜文英<sup>1,2</sup>, 赵志敏<sup>1</sup>, 刘玉洁<sup>3</sup>, 张文举<sup>4</sup>, 郑丽<sup>3</sup>, 郑泰玉<sup>5</sup>

(1. 南京航空航天大学自动化学院, 江苏南京 210016;

2. 桂林电子科技大学电子工程与自动化学院, 广西桂林 541004;

3. 大连工业大学信息科学与工程学院, 辽宁大连 116034;

4. 大连工业大学生物工程学院, 辽宁大连 116034;

5. 东北师范大学物理学院, 吉林长春 130024)

**摘要:** 研究单个二能级原子与真空电磁场的相互作用, 给出了总系统的薛定谔方程的解析波函数, 并分析得出原子质心运动的约化密度矩阵。结果表明原子内部电子态与真空场的相互作用会诱导原子的质心运动与原子的内部电子态发生纠缠, 从而会导致原子的质心运动发生量子退相干。文中还给出了退相干因子的解析表达式, 并通过图形演示了原子质心运动退相干的动力学演化情况, 以及与原子的空间尺度和原子-场耦合强度的相关性。

**关键词:** 量子退相干; 真空自发辐射; 质心运动; 二能级原子

中图分类号: 0431 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2014)04-0052-05

## Spatial Decoherence Induced by Spontaneous Emission

JIANG Wenyi<sup>1,2</sup>, ZHAO Zhimin<sup>1</sup>, LIU Yujie<sup>3</sup>, ZHANG Wenju<sup>4</sup>, ZHENG Li<sup>3</sup>, ZHENG Taiyu<sup>5</sup>

(1. College of Automation Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. College of Automation & Electronic Engineering, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, China;

3. School of Information Science and Engineering, Dalian Polytechnic University, Dalian 116034, China;

4. School of Biological Engineering, Dalian Polytechnic University, Dalian 116034, China;

5. School of Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

**Abstract:** The decoherence dynamics of a two-level atom coupled into a vacuum electromagnetic field are studied. The analytic solution of the Schrodinger equation has been given, and then the reduced density matrix for the motion of the atomic center of mass has been derived. It is shown that spontaneous emission induces the entanglement between the atomic spatial motion and the atomic electronic states, which induces the spatial quantum decoherence of the atom. The decoherence factor is given, and its properties, such as dynamical evolution with time and evolution for different atomic positions, are demonstrated by some figures.

**Key words:** quantum decoherence; spontaneous emission; motion of the center of mass; two-level atom

\* 收稿日期: 2014-01-17

基金项目: 吉林省自然科学基金资助项目(201115007); 国家自然科学基金资助项目(11105021, 11175044)

作者简介: 姜文英(1971年生), 女; 研究方向: 量子光学; 通讯作者: 郑丽, E-mail: zhengli@dlpu.edu.cn; 郑泰玉; E-mail: zhengty@nenu.edu.cn

经典力学适用于宏观物体，而量子力学适用于微观物体。但是，量子力学作为物理学的基本规律，也应该适用于宏观物体，它应以经典力学的规律作为其极限情况。量子力学中的一维谐振子是一个很好的例子。在低激发态，粒子的位置几率分布和经典几率分布差别极大，而当量子数变得相当大时，量子力学分布逐渐接近经典分布。这是 Bohr 对应原理的体现。另外，量子力学认为任何物体都具有波粒二象性，宏观物体也不例外，虽然日常所观测的现象并没有发现宏观物体具有量子相干性，但是人们已经从实验上观测到了宏观物体的量子相干效应。这说明了量子力学与经典物理并不矛盾，它们对世界的描述有些差异，却是相容的。

对于是什么机制使得宏观物体的量子相干性丧失的研究，不仅可以帮助人们更好的理解量子世界与经典世界的过渡，而且对量子信息学的发展也有着重要意义<sup>[1-3]</sup>。人们曾经尝试从各种角度去回答这个问题，也经历了各种各样的争论，但最终发现量子退相干理论能对这一问题给出正确的解释。关于量子退相干的机制，人们曾提出了许多模型理论<sup>[4-9]</sup>。人们也进行了许多相关的实验研究来演示量子退相干的动力学过程<sup>[10-12]</sup>，量子相干性的消失和恢复。几十年来，退相干的机制始终是集中研究和争论的课题，物理学家用模型演示这种机制，逐渐取得共识的是退相干的根源是环境的影响。目前人们研究了各种各样环境诱导退相干的模型理论<sup>[13-14]</sup>，试图在量子力学的框架中理解量子退相干问题。

本文根据环境诱导退相干的理论，研究了单个二能级原子与真空电磁场的相互作用，结果表明，原子的自发辐射会诱导原子的质心运动的空间量子相干性消失，从而导致原子间相对位置空间局域化。

## 1 系统的薛定谔方程及精确解

考虑二能级原子的激发态和基态分别为  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$ 。原子跃迁频率是  $\omega_0$ ，原子质量是  $m_0$ ，它的空间位置用  $x$  表示，相应的动量为  $p$ 。若原子放置在一个真空的电磁场中，则原子内部状态将与电场耦合，在旋转波近似下，二能级原子与场相互作用的哈密顿量为

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + \frac{1}{2}h\omega_0\sigma_z + h \sum_k \omega_k a_k^+ a_k + hg \sum_k [a_k \sigma_+ e^{ikx} + H. c] \quad (1)$$

在此  $\sigma_+$ 、 $\sigma_-$  和  $\sigma_z$  是原子算符， $a_k^+$  和  $a_k$  分别为真空电磁场下模式  $k$  的产生和湮灭算符，且波数为  $k$  的频率为  $\omega_k = c|k|$ ， $g$  是耦合常数。

我们考虑系统处在一维空间中。设  $t = 0$  时刻，系统的初始波函数可写为  $|\Phi(0)\rangle = |\psi(0)\rangle \otimes |e\rangle \otimes |0\rangle$ 。即原子的内部电子态处于激发态，电磁场处于真空状态，是原子的空间自由度的初始态，在原子的动量表象中，它可以写为动量算符的本征态  $|p\rangle$  的叠加：

$$|\psi(0)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp C_p |p\rangle \quad (2)$$

式中， $C_p$  是动量本征态  $|p\rangle$  相应的分布函数，并且满足归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} dp |C_p|^2 = 1$ 。因此整个系统的波函数演变可以假设为：

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} dp [A_p(t) |p, e, 0\rangle + \sum_k B_{p,k}(t) |p - hk, g, l_k\rangle] \quad (3)$$

系数  $A_p(t)$  和  $B_{p,k}(t)$  是和时间相关的量，通过求解薛定谔方程，我们得到（通过用 Weisskopf-Wigner 近似）：

$$A_p(t) = A_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t - i(\omega_A - \omega_0 + \Delta\omega)t}$$

$$B_{p,k}(t) = -igA_0 \frac{e^{-i(\omega_B - \omega_0)t} [1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t - i(\omega_A - \omega_B + \Delta\omega)t}]}{\frac{\gamma}{2} + i(\omega_A - \omega_B + \Delta\omega)} \quad (4)$$

定义

$$A_0 = C_p,$$

$$h\omega_A = p^2/(2m) + h\omega_0,$$

$$h\omega_B = (p - hk)^2/(2m) - h\omega_0/2 + h\omega_k,$$

以及  $\Gamma = \frac{\gamma}{2} + i\Delta\omega$ 。 $\gamma$  是原子从  $|e\rangle$  态自发辐射到  $|g\rangle$  态的衰变率。 $\Delta\omega$  是 Lamb 相移，考虑到它可以被合并到跃迁频率  $\omega_0$  中，在下面的计算中我们将其忽略不计。

## 2 约化密度矩阵

假定场的频率分布的间隔很小，我们可以用积分  $\frac{L}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk$  ( $L$  为有效模长度) 来代替上式中对  $k$  的求和。由于原子自发辐射引起的动能变化项  $h^2 k^2/(2m)$  是一个非常小的量，我们可以将其忽略不计。考虑到真实原子的速率远小于光在真空中的速率，对于 (3) 式给出的总系统演化的波函数，

通过对电磁场和原子内部状态求平均, 得到原子质心运动的约化密度矩阵为 (在坐标表象中)

$$\rho(x, x', t) = \psi(x, t)\psi^*(x', t)F(x, x', t) \quad (5)$$

在此计算过程中, 把  $\psi(x + hk, t)$  在  $x$  附近展开到了一级近似, 并假定  $\omega_0 \gg \Gamma$ 。

(5) 式中,  $F(x, x', t)$  是退相干因子, 其定义为

$$F(x, x', t) = \frac{e^{-\gamma t} + \frac{(2\pi g)^2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t/2})^2 J_0\left[\frac{\omega_0}{c}(x - x')\right]}{e^{-\gamma t} + \frac{(2\pi g)^2}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t/2})^2} \quad (6)$$

这里  $J_0\left[\frac{\omega_0}{c}(x - x')\right]$  是第一类 bessel 函数。从 (6) 式可以看出,  $F(x' = x, t) \equiv 1$ , 而  $F(x' = -x, t)$  则随时间衰减, 空间退相干时间  $t_d$  大约为  $2\gamma^{-1} \ln[1 + \sqrt{(e-1)\gamma}/(2\pi g)]$ 。而且原子的跃迁频率越高, 或辐射光子的波长越短, 原子尺寸越大, 退相干现象越明显 (见图 1)。

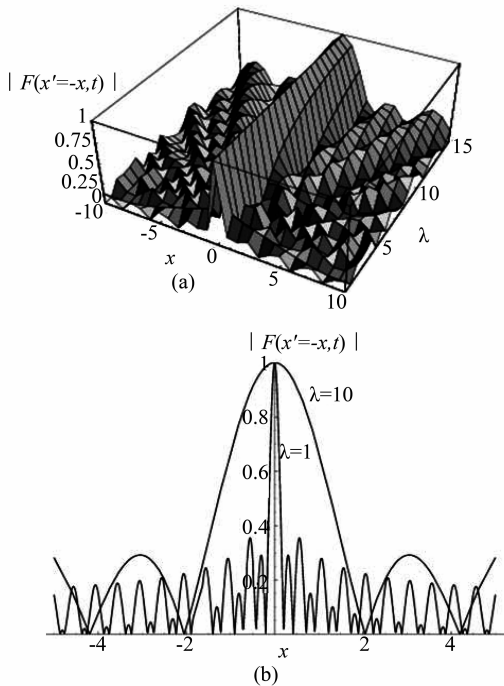


图 1 退相干因子  $|F(x' = -x, t)|$  示意图

Fig. 1 Schematics of decoherence factor  $|F(x' = -x, t)|$

(a)  $|F(x' = -x, t)|$  随  $x$  和  $\lambda$  的变化而不同,

(b) 某一相同时刻不同辐射光子波长下

$|F(x' = -x, t)|$  随  $x$  变化的示意图

另外, 我们分析退相干因子  $F(x' = -x, t)$  跟原子位置以及耦合常数间的关系。图 2 中, 给出了

三种不同位置情况下, 退相干因子随时间的演化情况, 可以看出, 退相干与原子的位置或原子尺度相对原子辐射光子的波长大小有密切关系, 在某情况下, 原子的空间运动会发生完全退相干, 即退相干因子会在有限时间内完全变为零, 而某些情况下, 原子的空间运动只会发生部分退相干。这些参数可以帮助寻找原子的退相干自由子空间。图 3 给出了更清楚地三维图像, 即退相干因子  $F(x' = -x, t)$  随时间和位置的变化图像。图 3 给出的是不同耦合强度下, 退相干因子  $F(x' = -x, t)$  随时间和原子位置的演化图示。图中从图 3 (a) 至图 3 (d), 耦合常数  $g$  逐渐变大, 可以看出, 耦合常数越小, 原子空间退相干时间越长, 即原子与场的耦合越弱, 原子空间运动的相干性越好, 原子内态与场耦合越强, 原子的空间位置退相干就会越明显。

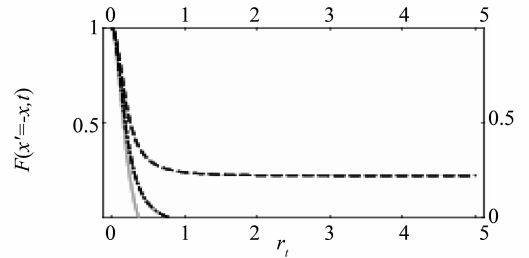


图 2 退相干因子  $|F(x' = -x, t)|$

在不同原子尺度情况下随时间演化示意图

Fig. 2 Evolution of  $|F(x' = -x, t)|$  for different  $x$   
图中虚线对应  $x = 0.5\lambda$ , 点虚线对应  $x = 1.42\lambda$ ,  
实线对应  $x = 0.8\lambda$

### 3 原子质心运动的空间量子退相干

假设 (2) 式中的原子质心运动的初始态波函数  $|\psi(0)\rangle$  是两个在中心位置分别在  $a$  与  $-a$  的高斯波包的叠加, 则在  $x$  表象中, 其表达式为

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\delta}} [G_+(x) + G_-(x)] \quad (7)$$

其中  $G_{\pm}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta x_0}}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x \mp x_0)^2}{4\Delta x_0^2}\right]$ ,  $\delta = 1 + \exp[-x_0^2/(2\Delta x_0^2)]$ 。在原子动量表象中  $|G_{\pm}\rangle$  可以写为动量算符的本征态  $|p\rangle$  的叠加形式:

$$|G_{\pm}\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp C_{\pm}(p) |p\rangle dp \quad (8)$$

其中,  $C_{\pm}(p)$  是动量本征态  $|p\rangle$  相应的分布函数并且满足归一化条件  $\int_{-\infty}^{\infty} dp |C_{\pm}(p)|^2 = 1$ 。

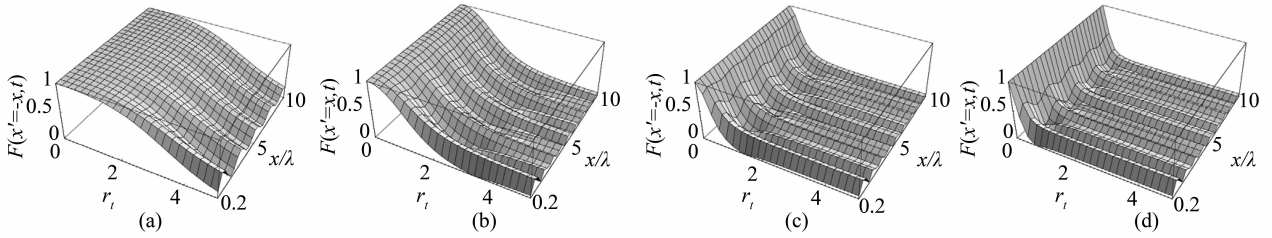


图 3 退相干因子  $F(x' = -x, t)$  随时间和位置演化的图示。

Fig. 3 Demonstration for the evolution of  $F(x' = -x, t)$  with time and the atomic position

(a)  $g=0.1$ ; (b)  $g=0.5$ ; (c)  $g=2$ ; (d)  $g=5$

图 4 给出了约化密度矩阵  $\rho(x, x', t)$  随时间演化的示意图 (分别对应两种不同情况下的三种不同时间), 一种情况是无自发辐射时的演化, 另一种存在自发发射时的演化情况。我们可以看到在有自发发射的情况下, 首先波包的扩散被抑制, 其次两波包的空间相干性随着时间而衰减。当  $t \gg t_D$

时, 沿着  $x = -x'$  方向的两个波峰可以在有限的时间衰减到几乎为零, 并且不会复原。因此原子质心运动的相干性被明显破坏。显然由于原子的自发辐射, 使得原子的空间自由度与真真空电磁场间产生量子纠缠, 从而所导致的原子的空间自由度发生退相干。

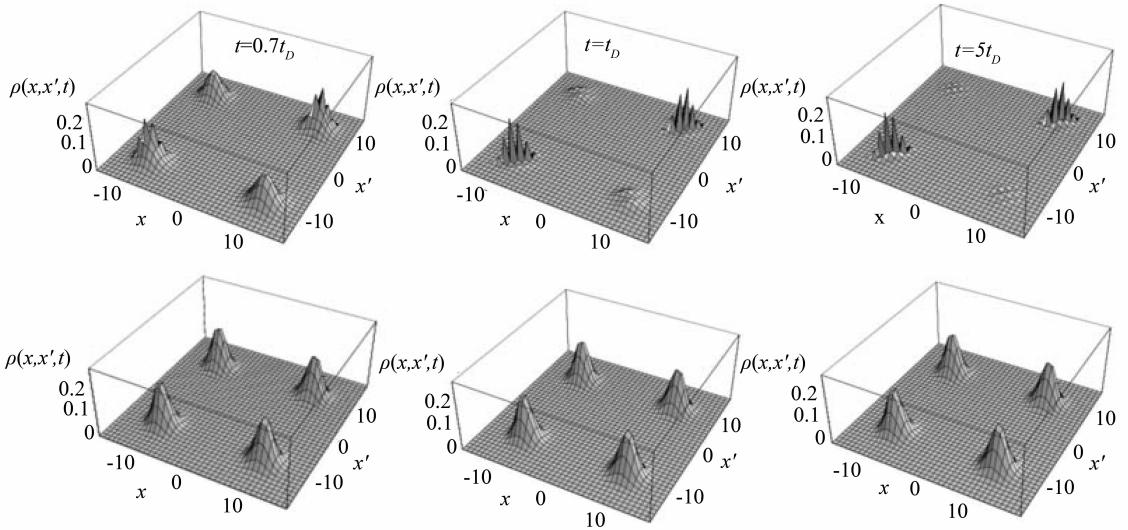


图 4 原子质心运动的约化密度矩阵随时间的演化示意图

Fig. 4 Schematics of the reduced density matrix for the motion of the atomic center of mass

(第一排图像为有自发辐射时的情况; 第二排为自由演化时的情况)

## 5 总 结

本文主要分析了原子的内部自由度对其质心运动的空间量子相干性的影响, 通过考虑原子内部电子态与真空电磁场的耦合, 讨论了原子质心运动的退相干动力学。在 weisskopf-wigner 近似下, 通过求解薛定谔方程, 给出了总哈密顿量的解析解和描述原子质心运动的约化密度矩阵。在此基础上, 进一步讨论了其量子退相干动力学演化情况。我们发现, 原子的自发辐射诱发了原子的空间自由度态、

原子的电子态与真空电磁场间的量子纠缠, 从而破坏了原子质心运动的量子相干性。

### 参考文献:

[1] 惠萍, 黄纲明. CdSe 量子点系统的库仑相互作用能的量子尺寸效应[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2004, 43(4): 38-40.  
 [2] 林位株, 寿倩, 刘鲁宁, 等. AlGaAs/GaAs 多量子阱中相干控制光电流的超快弛豫[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2004, 43(6): 73-76.

- 力学学报, 1994, 26(3): 380 – 384.
- [8] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京: 科学出版社, 1999.
- [9] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2004.
- [10] 王树勇, 梅凤翔. 相空间中完整约束系统的形式不变性[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2002, 41(6): 10 – 13.
- [11] FU J L, CHEN L Q, CHEN B Y. Noether-type theory for discrete mechanico-electrical dynamical systems with nonregular lattices[J]. *Sci China: Phys Mech Astron*, 2010, 53(9): 1687 – 1698.
- [12] 张毅. 非完整力学系统的 Hamilton 对称性[J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2010, 40(9): 1130 – 1137.
- [13] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的 Noether 对称性与守恒量[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2013, 52(4): 45 – 50.
- [14] 龙梓轩, 张毅. 基于按正弦周期律拓展的分数阶积分的变分问题的 Noether 定理[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2013, 52(5): 51 – 56.
- [15] LUO S K, LI L. Fractional generalized Hamiltonian equations and its integral invariants[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1/2): 339 – 346.
- [16] ZHANG Y, ZHOU Y. Symmetries and conserved quantities for fractional action-like Pfaffian variational problems[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2013, 73(1/2): 783 – 793.
- [17] EL'SGOL'C L E. Qualitative methods in mathematical analysis[M]. Providence: American Mathematical Society, 1964.
- [18] HUGHES D K. Variational and optimal control problems with delayed argument [J]. *J Optim Theory Appl*, 1968, 2(1): 1 – 14.
- [19] PALM W J, Schmitendorf W E. Conjugate-point conditions for variational problems with delay argument[J]. *J Optim Theory Appl*, 1974, 14(6): 599 – 612.
- [20] ROSENBLUETH J F. Systems with time delay in the calculus of variations: a variational approach[J]. *IMA J Math Control Inform*, 1988, 5(2): 125 – 145.
- [21] CHAN W L, YUNG S P. Sufficient conditions for variational problems with delayed argument [J]. *J Optim Theory Appl*, 1993, 76(1): 131 – 144.
- [22] LEE C H, Yung S P. Sufficient conditions for optimal control problems with time delay [J]. *J Optim Theory Appl*, 1996, 88(1): 157 – 176.
- [23] FREDERICO G S F, TORRES D F M. Noether's symmetry theorem for variational and optimal control problems with time delay [J]. *Numerical Algebra, Control and Optimization*, 2012, 2(3): 619 – 630.
- [24] 张毅, 金世欣. 舍时滞的非保守系统动力学的 Noether 理论 [J]. *物理学报*, 2013, 62(21): 214502.
- [25] JIN S X, ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for a Hamilton system with time delay [J]. *Chinese Physics B*, 2014, 23(5): 054501.

(上接第 55 页)

- [3] 文家焱; 梁世东. 基于绝热量子演化的量子状态转换方法[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2007, 46(4): 22 – 25.
- [4] ZEH H D. On the interpretation of measurement in quantum theory[J]. *Found Phys*, 1970, 1(1): 69 – 76.
- [5] ZUREK W H. Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse [J]. *Phys Rev D*, 1981, 24(6): 1516 – 1525.
- [6] ZUREK W H. Environment-induced superselection rules [J]. *Phys Rev D*, 1982, 26(8): 1862 – 1880.
- [7] BOSE S, JACOBS K, KNIGHT K L. Scheme to probe the decoherence of a macroscopic object [J]. *Phys Rev A*, 1999, 59(5): 3204 – 3210.
- [8] SUN C P, LIU X F, ZHOU D L, et al. Localization of a macroscopic object induced by the factorization of internal adiabatic motion [J]. *Eur Phys J D*, 2001, 17(10): 85 – 92.
- [9] ZHANG P, LIU X F, SUN C P. Consistent approach for quantum measurement [J]. *Phys Rev A*, 2002, 66(4): 042104.
- [10] BRUNE M, HAGLEY E, DREYER J, et al. Observing the progressive decoherence of the “Meter” in a quantum measurement [J]. *Phys Rev Lett*, 1996, 77(24): 4887 – 4890.
- [11] MYATT C J, KING B, TURCHETTE Q A, et al. Decoherence of quantum superpositions through coupling to engineered reservoirs [J]. *Nature*, 2000, 403(1): 269 – 273.
- [12] FRIEDMAN J R, PATEL V, CHEN W, et al. Quantum superposition of distinct macroscopic states [J]. *Nature*, 2000, 406(6): 43 – 46.
- [13] ZHENG L, LI C, LI Y, et al. Localization of the relative position of two atoms induced by spontaneous emission [J]. *Phys Rev A*, 2005, 71(6): 062101.
- [14] ZHENG L, YANG C P, NORI F. Quantum dynamics of spatial decoherence of two atoms in a ring cavity [J]. *Phys Rev A*, 2010, 82(6): 062106.